統計学

北門　利英（海洋生物資源学科）

Lecture 9

- 仮説検定のロジック
- 正規分布の平均の検定（分散既知）
- 正規分布の平均の検定（分散未知）

このビデオは統計学 Lecture9のダイジェスト版です．前回と前々回は正規分布の平均パラメータに対する点推定と区間推定を扱いました．今回は正規分布の平均パラメータに対する仮説検定について学びます．それでは始めます．

仮説とは？

生物や科学における検証課題

- クロマグロの資源量は減少傾向にあるか？
- ミンククジラの肥満度は雌雄で異なるか？
- 北太平洋に回遊してくるニタリクジラは単一系群か？
- ある毒性のある物質は発ガン性があるか？
- 新薬は治療に有効か

など

世の中にある科学的な仮説には様々な種類のものがあります．皆さんの卒論研究や大学院の研究でも仮説を立ててそれを検証していく，という研究の進め方をすることもあるかもしれません．

例題：ポテトチップス問題

Ａ社のある菓子のパッケージには内容量100ｇと記されていた．好奇心旺盛なあなたは，これが本当かどうかを知りたくなった．そこで，早速スーパー10か所に出かけて1袋ずつ購入し，帰宅後重さを量った．その結果，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ (g) と観測された．

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim (iid) N(\mu, \sigma^2)$$

ここでは勝手に私が名付けたポテチ問題を扱いたいと思います．いま仮想的な設定として，ポテチのパッケージにされている通りの内容量があるかどうかを知りたくなり，10個買ってきて内容量を測定したとします．工場で生産されているポテチ内容量がある平均mu, 分散sigma2の正規分布に従うと仮定します．いま興味の対象は平均パラメータmuで，この値がパッケージに書いてある通りに100かどうかを知りたい，という設定です．

例題：ポテトチップス問題

Ａ社のある菓子のパッケージには内容量100ｇと記されていた．好奇心旺盛なあなたは，これが本当かどうかを知りたくなった．そこで，早速スーパー10か所に出かけて1袋ずつ購入し，帰宅後重さを量った．その結果，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ (g) と観測された．

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim (iid) N(\mu, \sigma^2)$$

このとき，あなたが積極的に示したいのは，

「内容量の平均μが100gである」（これを帰無仮説という）

ではなく，むしろ

「内容量の平均μが100gではない」(対立仮説として設定)

の方であろう．

これをどのように示すか？あるいは判断を下すか？

そこで仮説として「内容量の平均μが100gである」を立てたいと思います．これを仮説検定の言葉で帰無仮説と言います．それに対して，相反する仮説として「内容量の平均μが100gではない」を立てます．これを対立仮説と言います．どうやってこれらの仮説に対して判断を下せばよいでしょうか．

仮説検定における過誤の確率

仮説検定	帰無仮説を真と判断	帰無仮説を偽と判断
帰無仮説が真	正しい判断	第1種の過誤
帰無仮説が偽	第2種の過誤	正しい判断

- 「第1種の過誤」の確率をある程度認めて(5%など)，仮説が偽のときに偽と判断する確率を大きくしたい

いま，2つの仮説があります．すなわち帰無仮説が真か偽か．それに対して2つの判断があります．帰無仮説を真と判断するか，あるいは偽と判断するか．仮説の真偽と判断とで2×2の4つの組み合わせがあります．また2つの異なる間違いのパターンがあります．すなわち，帰無仮説が真の時に，それを真とすることが正しい判断であるのに対し，それを偽と判断する間違いのことを第1種の過誤と呼びます．逆に，帰無仮説が偽の時に誤ってそれを真としてしまう過誤を第2種の過誤と言います．これら2つの過誤を同時に小さくすることは一般に難しく，トレードオフの関係があるため，通常は「第1種の過誤」の確率をある程度認めて(5%など)仮説が偽のときに偽と判断する確率を大きくしたいと考えます．これから説明する検定方法はそういう哲学の上に成り立っています．

仮説検定の流れ

1. 帰無仮説と対立仮説を設定
2. 観測データの確率分布を定義し，それぞれの仮説と対応させる
3. 検定の有意水準(第1種の過誤の確率)を設定(α=0.05など)
4. 帰無仮説が正しいと仮定して，その下で観測結果がまれにしかおこらないか検討する
5. 有意水準に合わせて帰無仮説の採択域と棄却域を設定
6. 帰無仮説を採択する（疑わしきは罰せず)か，あるいは（積極的に）帰無仮説を棄却し対立仮説を選択するかの判断を下す

仮説検定を実施するための具体的な流れですが，まず帰無仮説と対立仮説を設定します．次に検定で用いる観測データの確率分布を定義し，それぞれの仮説と対応させます．さらに，検定の有意水準(第1種の過誤の確率)を設定(α=0.05など）します．そして，作業仮説として帰無仮説が正しいと仮定し，その下で観測結果がまれにしかおこらないかどうかを検証します．検討する有意水準に合わせて帰無仮説の採択域と棄却域を設定し，最終的に帰無仮説を採択する（疑わしきは罰せず)か，あるいは（積極的に）帰無仮説を棄却し対立仮説を選択するかの判断を下します．

正規分布の平均の検定
（１標本，分散既知）

T. Kitakado | Statistics | Lecture 9, July 8, 2020

それでは具体的に方法と解き方を見ていきましょう．区間推定の時と同様に，分散が既知か未知で少し用いる式が違いますが，考え方は全く同じです．それでは見ていきましょう．

ポテチ問題(再)

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim (iid) N(\mu, \sigma^2)$

帰無仮説 (H_0) μ=100

対立仮説 (H_1) μ≠100

いま，10袋の計測結果が以下のとおりであったとする

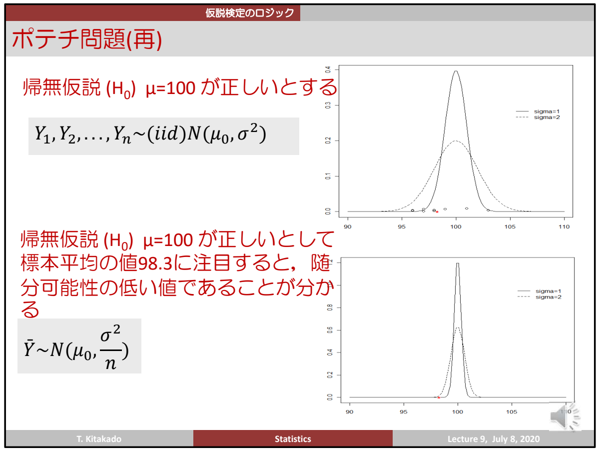
Y=(98, 96, 96, 101, 103, 99, 98, 97, 97, 98)

この観測値の平均値は98.3であり，この値が100に値に近ければH_0を採択し，100から離れていればH_0を棄却する

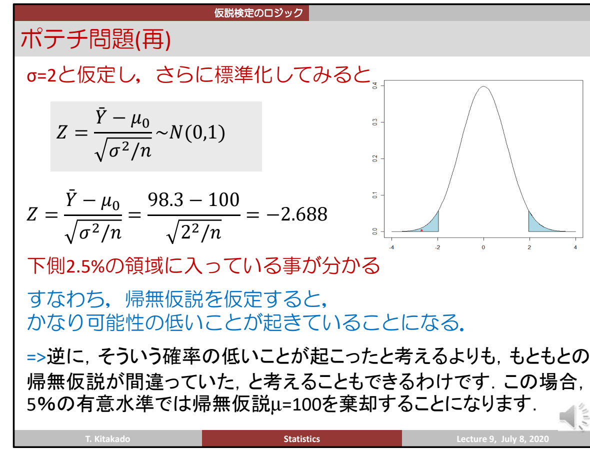
では，どれくらい離れていると棄却に帰無仮説を棄却すべきか？

T. Kitakado | Statistics | Lecture 9, July 8, 2020

このスライドでは，改めて2つの仮説と観測値の確率分布，そして観測データを示しています．帰無仮説がmu=100に対して，muの推定値，すなわち標本平均は98.3です．少し小さいですね．でもどれくらい小さければ帰無仮説が間違っていると言えるでしょうか？



それはデータの散らばり具合，すなわち分散とも関係するのですが，いま分散が分かっている場合を想定していますので，例えば標準偏差sigmaが1とすると，このグラフで見た感じmu=98.3というのは少々チラバリからみてもずれているようにも見えます．ただ，これではわかりにくいですので，標本平均の確率分布と比べてみると，y-barの確率分布は sigma=1でも2のときでも，かなり100に集中した分布になり，それに対して観測値98.3はかなりずれていて，もしmu=100だとしたらかなりあり得ないことが起きていることになります．このあり得ないことが起きているかどうかが重要な判断となります．



そこで例えばsigma=2を仮定して，実際にZの値を計算してみると 2.688となります．前々回に標準正規分布の数表を思い出していただきたいですが，Zの値が -1.96 から 1.96 の間に入っている確率は95%，ということはこの -19.6以下，あるいは1.96以上の値をとる確率は併せて5%しかありません．したがって，ー2.688という値は，帰無仮説が正しければかなり確率の低いと考えます．逆に，そういう確率の低いことが起こったと考えるよりも，もともとの帰無仮説が間違っていた，と考えることもできるわけです．この場合，5%の有意水準では帰無仮説mu=100を棄却することになります．

採択域と棄却域の設定

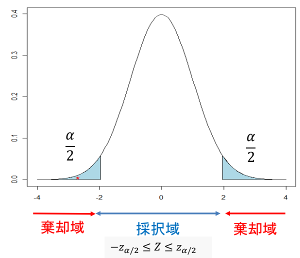
$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}} < Z\right) = \alpha$$

有意水準 α の採択域

$$-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}$$



そこでもうすこしフォーマルにかんげると，有意水準alphaの仮説検定では，両側の確率が alpha/2となる範囲を棄却域，その内側を採択域とします．αが0.05のとき先ほども言いましたように -1.96 から 1.96が採択域となります．

演習問題

ある溶液中に含まれているアルコールの割合(%)を10回測定して次の結果を得た.

12.3, 13.0, 11.8, 12.7, 12.6, 13.4, 11.9, 12.4, 11.6, 12.3

真のアルコールの割合をμとするとき,
無帰仮説 H_0: μ=12
対立仮説 H_1: μ≠12
とし有意水準5%で検定せよ．ただし，σ=1 あるいは 0.5とする.

それでは練習問題に取り組んでみて下さい．

正規分布の平均の検定
（１標本，分散未知）

次に分散が分からない場合を説明します．

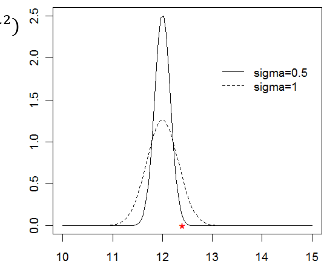
先ほどの練習問題

- σ=1 と仮定すると，Z = 1.265 となり帰無仮説を採択
- σ =0.5と仮定すると，Z=2.530 帰無仮説を棄却

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10} \sim (iid) N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow \bar{Y} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

分散の値によって，
帰無仮説の妥当性が変わ

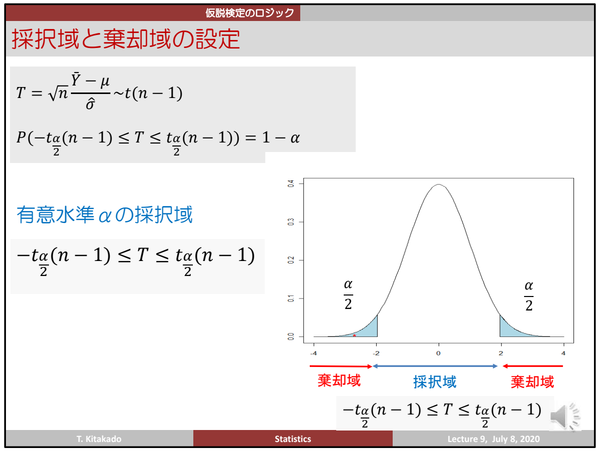


実際に計算すると

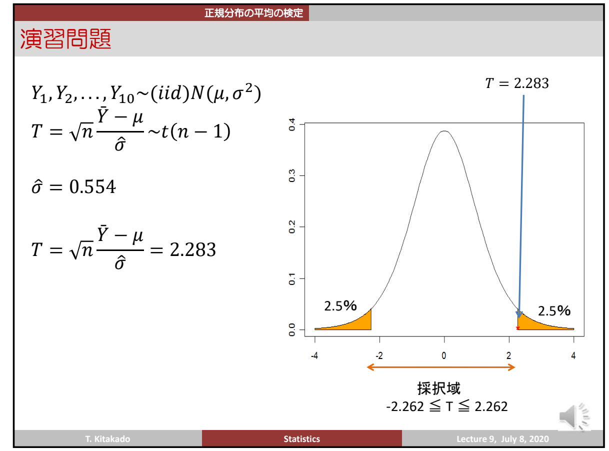
$\hat{\sigma} = 0.554$

これをどのように使う？

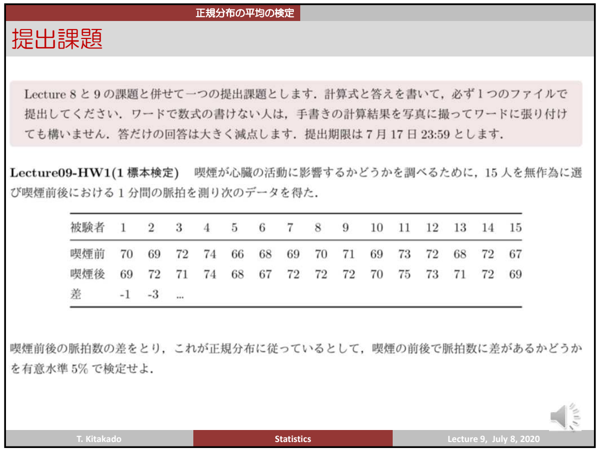
先ほどのアルコール濃度の例では，σの値によって仮説検定の結果が異なりました．それは分散σ2の値によって起こりやすさや確率が変わるからです．この例のように標本平均 ybarの分布がシグマの値によって違いますから，赤い点のデータの起こりやすさも変わってきます．じつはデータから分散を推定し標準偏差 sigmaを求めると 0.554となります．これをどのように使いましょうか．



前回の区間推定を思いだしてほしいですが，σが未知の時にその推定値を代入すると標準正規分布にはならずt分布になると言いました．しかし違いはそれだけで，全く論理で仮説検定ができます．ただし採択域はデータの数に依存しますので，前回配布したt分布の数表を必ず利用してください．



アルコール濃度の例では，T=2.283となり，自由度10-1=9のt分布における有意水準5%の採択域は -2.262 ≦ T ≦ 2.262なのでギリギリ棄却されることが分かります．



正規分布の平均の検定

提出課題

Lecture 8 と 9 の課題と併せて一つの提出課題とします．計算式と答えを書いて，必ず 1 つのファイルで提出してください．ワードで数式の書けない人は，手書きの計算結果を写真に撮ってワードに張り付けても構いません．答だけの回答は大きく減点します．提出期限は 7 月 17 日 23:59 とします．

Lecture09-HW1(1 標本検定)　喫煙が心臓の活動に影響するかどうかを調べるために，15 人を無作為に選び喫煙前後における 1 分間の脈拍を測り次のデータを得た．

被験者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
喫煙前	70	69	72	74	66	68	69	70	71	69	73	72	68	72	67
喫煙後	69	72	71	74	68	67	72	72	72	70	75	73	71	72	69
差	-1	-3	...												

喫煙前後の脈拍数の差をとり，これが正規分布に従っているとして，喫煙の前後で脈拍数に差があるかどうかを有意水準 5% で検定せよ．

T. Kitakado　Statistics　Lecture 9, July 8, 2020

最後に提出課題です．前回の区間推定と併せて今回の検定の宿題を7/17までに学務システムに提出してください．それではLecture9のビデオを終わります．なお，次回からPCを使った演習を行います．詳細はまた連絡いたします．