

統計学 2020 Lecture 9: 正規分布におけるパラメータの仮説検定

北門 利英（東京海洋大学海洋生物資源学科）

2020 年 7 月 8 日

Attention:

- 今回およびこれまでの授業に関してわからないことがあれば、メールかリアルタイム接続時に遠慮なく質問してください（7 月 8 日は 13:00-13:45 とします）。

Point: 前回までに正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に対して、 μ に対する点推定と区間推定を学んだ。今回は、 μ の値に対する検定法について学ぶ。次の用語をしっかり理解すること。

- 分散が既知の場合に、正規分布の平均値に対する仮説検定ができること
- 分散が未知の場合に、正規分布の平均値に対する仮説検定ができること
- 分散が共通でかつ未知の場合に、正規分布の平均値の差の仮説検定ができること（2 標本検定）

1 1 変数の正規分布に対する区間推定（復習）

1.1 分散 σ^2 が既知の時

正規分布の μ の区間推定について先週学んだ。分散 σ^2 が既知の時、

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となり、

$$\begin{aligned} P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow P\left(\bar{Y} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $z_{\alpha/2}$ は標準正規分布の上側 $\alpha/2 \times 100\%$ 点である。したがって、標準偏差 σ が既知と考えられる場合には、

$$\bar{Y} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で信頼区間を求めることができる。

1.2 分散 σ^2 が未知の時

通常は標準偏差 σ が未知であり、 $\hat{\sigma}^2$ を代わりに用いるが、 $\hat{\sigma}^2$ はあくまで推定値であり不確実性が伴う。上述のような標準化をしても標準正規分布には従わず自由度 $(n-1)$ の t 分布に従うことが知られている。

$$T = \frac{\bar{Y} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad (1)$$

したがって、分散既知の場合と同様の計算により、

$$\bar{Y} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

が水準 $(1-\alpha)100\%$ の信頼区間となる。ただし、 $t_{\alpha/2}(n-1)$ は自由度 $(n-1)$ の上側 $\alpha/2 \times 100\%$ 点である。

2 1 変数の正規分布に対する仮説検定

この節では、未知のパラメータの値を推定するのではなく、パラメータに対する命題を判断するための方法を考える。真偽の対象となる命題のことを仮説と呼ぶ。また、観測値を基に仮説の妥当性を問うことを仮説検定という。ここで検定について一般的な定義を与えておくことにする。

定義 1 ある母集団について興味のあるパラメータがあり、それについての主張があるとする。これを仮説と呼び、観測値からその主張を採択するか棄却するかを判断することを（統計的）仮説検定とよぶ。

いま正規分布のパラメータに対して、ある種の仮説（すなわち $\mu = \mu_0$ ではないか？という仮説）があるとする。仮説検定ではこれを以下のように定式化する。

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

先述の通り、標本平均 $\bar{Y}$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の期待値パラメータ μ に対する推定量であり、この推定量をベースに仮説検定法を考えていくことが自然である。ところで、 $\bar{Y}$ の値がどれくらい μ_0 から離れていれば「帰無仮説の下ではありえないくらいの観測値」となるか。

仮説検定の判断の間違いには 2 種類あり、それぞれ次のように定義する。

- 第 1 種の過誤：帰無仮説が真であるのにそれを誤って棄却する
- 第 2 種の過誤：帰無仮説が偽であるのにそれを誤って棄却しない

この 2 つの過誤を共に小さくすることが望ましいが、同時に最小化することはできず、通常は第 1 種の過誤の確率を $100\alpha\%$ とあらかじめ定め、その下でなるべく第 2 種の過誤の確率を小さくするような検定方式を選ぶ。とくに、対立仮説が正しいとき、 $1 - P(\text{第 2 種の過誤})$ を検出力とよび、パラメータ値が何であつても検出力が最大となる検定が理論上は最も良い検定となる。

最後に正規分布の検定方法をまとめておく。

i) 分散 σ^2 が既知のときの両側検定

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} &\Leftrightarrow \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{Y} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{のとき } H_0 \text{ を採択} \\ \left| \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}} &\Leftrightarrow \bar{Y} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ or } \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \bar{Y} \quad \text{のとき } H_0 \text{ を棄却} \end{aligned} \quad (3)$$

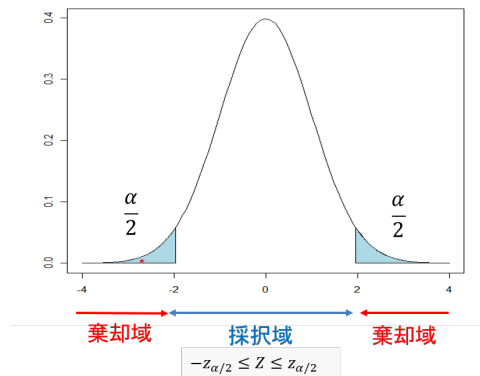


図1: 分散が既知の場合の棄却域の概念図 (色のついている面積が有意水準に対応し, この例は 5% の場合. 観測値から計算される Z の値が採択域に入っているかどうかを判断)

ii) 分散 σ^2 が未知のときの両側検定 ($t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ とおく)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right| \leq t_{\frac{\alpha}{2}} &\Leftrightarrow \mu_0 - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{Y} \leq \mu_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{のとき } H_0 \text{ を採択} \\ \left| \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}} &\Leftrightarrow \bar{Y} < \mu_0 - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ or } \mu_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} < \bar{Y} \quad \text{のとき } H_0 \text{ を棄却} \end{aligned} \quad (4)$$

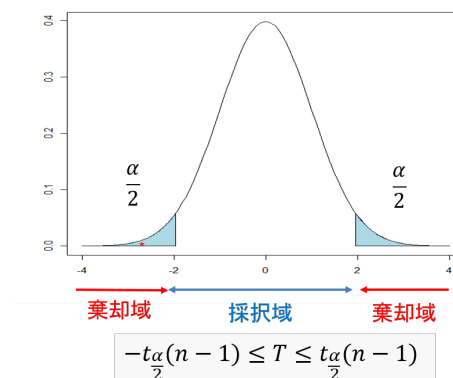


図2: 分散が未知の場合の棄却域の概念図 (色のついている面積が有意水準に対応し, この例は 5% の場合. 観測値から計算される T の値が採択域に入っているかどうかを判断)

3 正規分布における 2 標本検定 (参考までに)

次に, 2 つのグループの比較に焦点を当てる. これを統計モデルとして次のように一般的に表現する.

$$\begin{aligned} Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1} &\stackrel{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2n_2} &\stackrel{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{aligned} \quad (5)$$

いま, 次のような仮説検定を考えよう.

帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d$

対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d$

$d = 0$ のときが期待値の同一性の検定であるが, 一般性を保つために, あえて差を表す定数 d を加えている. このように 2 群の比較をする際は, 期待値と併せて散らばり具合も比較をしたいと考える場合もあるだろうが, ここでは分散が等しいかどうか分からない場合も含めて, 期待値の差だけに興味があるとする. 実は, 正規分布における期待値の差の検定は古くから議論されている問題であり, 等分散が仮定できる場合の理論は, 1 標本の場合とほぼ同様に極めて自然に展開が可能である.

3.0.1 i) 等分散 $\sigma_1 = \sigma_2$ を仮定できる場合の 2 標本検定

この場合, $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, S_1 + S_2$ が互いに独立で, かつパラメータ (μ_1, μ_2, σ^2) の十分統計量となる. ただし,

$$\begin{aligned} \bar{Y}_i &= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad \sim N(\mu_i, \sigma^2) \quad (i = 1, 2) \\ S_i &= \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad \sim \sigma^2 \chi^2(n_i - 1) \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (6)$$

であり, 異なる群のデータも互いに独立であるから,

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 &\sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right) \stackrel{d}{=} N\left(d, \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \sigma^2\right) \\ S_1 + S_2 &\sim \sigma^2 \chi^2(n_1 + n_2 - 2) \end{aligned} \quad (7)$$

が成り立つ. ここで上式で χ^2 分布の期待値の性質から

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} (S_1 + S_2) \quad (8)$$

が不偏推定量であることが明らかなので, 1 変数の場合と同様に統計量 T を定義し, 帰無仮説の下で

$$T = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - d}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \hat{\sigma}^2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad (9)$$

が成り立つことを利用して仮説の検定を行うことができる. たとえば採択域は $|T| \leq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$ となる.

3.0.2 ii) 不等分散 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ の場合の 2 標本検定 (参考までに)

等分散性を仮定できない場合にも,

$$\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \quad (10)$$

が成り立つから, 帰無仮説の下で

$$\frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1) \quad (11)$$

が成り立ち, $\hat{\sigma}_i^2 = S_i/(n_i - 1)$ ($i = 1, 2$) を代入すれば等分散の時と同様に t 分布による検定ができそうに思える. しかし, このようにして作られる統計量は分散比 σ_1^2/σ_2^2 に依存する. 詳細は割愛するが, t 分布の自由度は近似的に

$$DF = [w^2/(n_1 - 1) + (1 - w)^2/(n_2 - 1)]^{-1} \text{ where } w = \frac{\hat{\sigma}_1^2/n_1}{\hat{\sigma}_1^2/n_1 + \hat{\sigma}_2^2/n_2} \quad (12)$$

で計算される. このような検定を特別に Welch の検とよぶ. ただし, この値は必ずしも整数とならないため, t 分布の数表を使う際には保守的に小数点以下を切る. なお, R では小数値の自由度でも計算でき, `t.test` 関数もそれに対応している.

4 提出課題

Lecture 8 と 9 の課題と併せて一つの提出課題とします. 計算式と答えを書いて, 必ず 1 つのファイルで提出してください. ワードで数式の書けない人は, 手書きの計算結果を写真に撮ってワードに張り付けても構いません. 答だけの回答は大きく減点します. 提出期限は 7 月 17 日 23:59 とします.

Lecture09-HW1(1 標本検定) 喫煙が心臓の活動に影響するかどうかを調べるために, 15 人を無作為に選り喫煙前後における 1 分間の脈拍を測り次のデータを得た.

被験者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
喫煙前	70	69	72	74	66	68	69	70	71	69	73	72	68	72	67
喫煙後	69	72	71	74	68	67	72	72	72	70	75	73	71	72	69
差	-1	3	...												

喫煙前後の脈拍数の差をとり, これが正規分布に従っているとして, 喫煙の前後で脈拍数に差があるかどうかを有意水準 5% で検定せよ.