統計学 2020 Lecture 8: 正規分布におけるパラメータの信頼区間

北門　利英（東京海洋大学海洋生物資源学科）

2020 年 7 月 1 日

Attention:

- 大学から「前学期の定期試験は原則としては対面形式での実施は行わないこと」との指示がありましたので 9 月に予定していた対面試験を行わず，代替方式を今後検討し後日連絡致します．
- これに安心せず，今回およびこれまでの授業に関してわからないことがあれば，メールかリアルタイム接続時に遠慮なく質問してください（7 月 1 日も 13:00-14:00 とします）．

Point: 前回は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に対して，μ の値がいくらかを推定する点推定について学んだ．今回は，μ の値がどの程度の範囲にあると考えられるかを問う区間推定について学ぶ．次の用語をしっかり理解すること．

- 分散が**既知**の場合に，正規分布の平均値に対する信頼区間が求められること
- 分散が**未知**の場合に，正規分布の平均値に対する信頼区間が求められること

1　正規分布とパラメータの推定 (復習)

1.1　正規分布の定義

確率密度関数 $f(y)$ が確率分布を規定しており，特に以下の形の確率密度関数を持つとき，確率変数は正規分布にしたがうという．

連続型分布 1　[正規分布]　確率変数 Y の確率密度関数が

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < \infty \quad \begin{pmatrix} -\infty < \mu < \infty \\ 0 < \sigma < \infty \end{pmatrix} \tag{1}$$

となるとき，Y は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうという．$E[Y] = \mu$ と $V[Y] = \sigma^2$ である．

1.2　標準正規分布

性質 1　確率変数 Y が $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき，

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \tag{2}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう．この変換を標準化という．

1.3 正規分布の再生性

定理 1 確率変数 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ が独立同一に $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき，$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ は $N(\mu, \sigma^2/n)$ にしたがう．

1.4 パラメータの推定

正規分布にしたがう観測値が

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim (iid) N(\mu, \sigma^2) \tag{3}$$

のように得られるとき，平均パラメータ μ に対して不偏でかつ分散が最小となる推定量は

$$\hat{\mu}(Y) = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{4}$$

であり，これも確率変数で

$$\hat{\mu}(Y) = \bar{Y} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \tag{5}$$

のように正規分布にしたがう．推定量 $\hat{\mu}(Y)$ の分散は

$$V[\hat{\mu}(Y)] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{6}$$

となる．また分散パラメータ σ^2 の推定量は

$$\hat{\sigma}^2(Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y})^2 \tag{7}$$

である．

2 t 分布

上記の標準正規分布と確率密度関数の形は似ているが，分布の裾の形，すなわち平均値から離れた値の起こりやすさが異なる t 分布という確率分布を覚えてほしい．この確率分布が必要となる理由は後述する．

連続型分布 2 [t 分布] 確率変数 T が確率密度関数

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty \tag{8}$$

を持つとき，自由度 n の t 分布 (t-distribution) $t(n)$ にしたがうという．

ここで Γ はガンマ関数で，以下のように定義される関数である．

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

☞ この授業で t 分布は大変重要な役割を果たしますが，t 分布の確率密度関数自体は覚える必要はありません．ただし，次の性質はしっかり頭に入れてください．

t 分布の自由度は分布の性質を規定している．自由度 $n = 1, 5, \infty$ の場合を図に示している．確率密度関数はすべての自由度において 0 に対して対象であるが，$n = 1$ のときには平均値から離れた値も取るが，自由度をどんどん大きくし $n \to \infty$ とすると（理論的に）標準正規分布 $N(0, 1)$ に近づく．

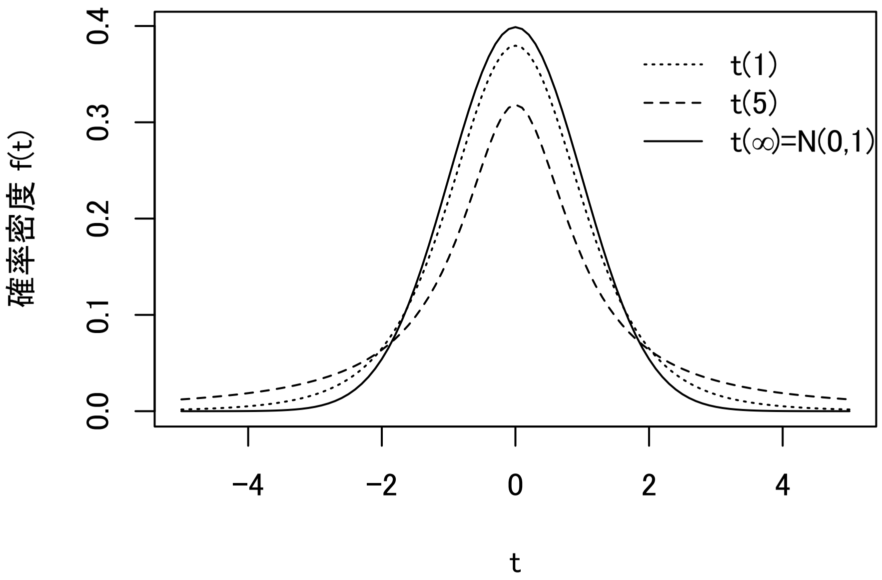


図1　t 分布の確率密度関数

この t 分布は，はずれ値を含む観測値にしばしば利用されるが，それ以上に信頼区間の構成や仮説検定で重要な役割を果たす．そのことは，証明は省略するが，次の定理に基づく．

定理 2　確率変数 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ が独立同一に $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき，

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{Y} - \mu}{\hat{\sigma}} \tag{9}$$

は自由度 $n - 1$ の t 分布 $t(n - 1)$ にしたがう．

3　正規分布に対する区間推定

前回は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に対して，μ の値がいくらかを推定する点推定について学んだ．今回は，正規分布の μ の値のありそうな範囲を問う区間推定の考え方と構成を学ぶ．

3.1 信頼区間の一般的な形

定義 1 一般に区間 $[L(y), U(y)]$ が信頼水準 $(1-\alpha)100\%$ の信頼区間であるとは，未知のパラメータ θ に対し，

$$P_\theta(L(y) \le \theta \le U(y)) = 1-\alpha \quad \text{for all} \quad \theta \in \Theta \tag{10}$$

を満たすことである．ただし，$L(y), U(y)$ は観測値 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の関数である．

3.2 分散パラメータ σ^2 が既知の場合の平均パラメータ μ に対する信頼区間

ところで，先述の通り μ の推定値 $\bar{Y}$ に対して式 (**??**) が成り立つから，これを標準化することで

$$Z = \frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{11}$$

となり，

$$\begin{aligned} & P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \\ \iff \quad & P\left(\bar{Y} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{Y} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \end{aligned} \tag{12}$$

を得る．ただし，$z_{\alpha/2}$ は標準正規分布の上側 $\alpha/2 \times 100\%$ 点である．したがって，標準偏差 σ が既知と考えられる場合には，

$$\bar{Y} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{Y} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{13}$$

で信頼区間を求めることができる．

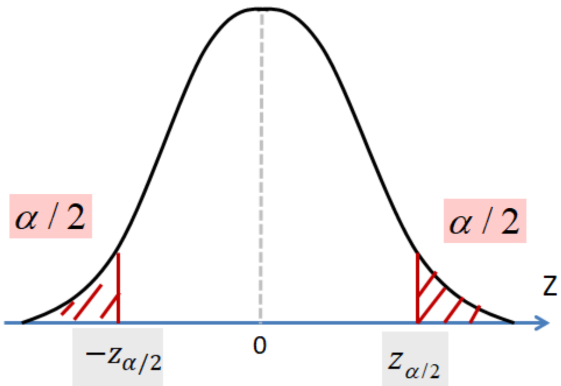


図2 標準正規分布と水準の概念図

例 1 （前回のマグロの続き）ある海域に生息するマグロ種の 1 歳魚を 9 個体ランダムにサンプリングし，その体長を測定したところ 42, 40, 50, 39, 40, 43, 42, 48, 43 (cm) であった．これらが独立同一に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとする．ただし σ は既知で 6 とする．このとき，90% 信頼区間, 95% 信頼区間および 99% 信頼区間をそれぞれ求めよ．

例として 90% 信頼区間を求める．$\alpha = 0.1$ とすればよいから，自由度 ∞ の t 分布は標準正規分布と同一であるから t 分布表の無限大の行を参照すると，$z_{0.05} = 1.645$ であることが分かり，これを用いて以下のように求めることができる．

$$\begin{aligned} & \bar{Y} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{Y} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \iff & 43 - 1.645\frac{6}{\sqrt{9}} \le \mu \le 43 + 1.645\frac{6}{\sqrt{9}} \\ \iff & 39.71 \le \mu \le 46.29 \end{aligned}$$

95% 信頼区間および 99% 信頼区間は，それぞれ $\alpha = 0.05, 0.01$ とすればよいから，$z_{0.025} = 1.960, z_{0.005} = 2.576$ を用いる．結果をまとめると以下のとおりであるが，信頼水準を上げるとそれだけミスが許されないから，広めの信頼区間となることが分かる．

信頼水準	α	$z_{\alpha/2}$	信頼区間
90%	0.10	1.645	$39.71 \le \mu \le 46.29$
95%	0.05	1.960	$39.08 \le \mu \le 46.92$
99%	0.01	2.576	$37.85 \le \mu \le 48.15$

3.3 分散パラメータ σ^2 が未知の場合の平均パラメータ μ に対する信頼区間

通常は標準偏差 σ が未知であり，$\hat{\sigma}^2$ を代わりに用いるが，$\hat{\sigma}^2$ はあくまで推定値であり不確実性を伴うから式 (**??**) が成り立たず，自由度 $(n-1)$ の t 分布に従う．

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{Y} - \mu}{\hat{\sigma}} \sim t(n-1) \tag{14}$$

したがって，同様の計算により，

$$\bar{Y} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{Y} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

が水準 $(1-\alpha)100\%$ の信頼区間となる．ただし，$t_{\alpha/2}(n-1)$ は自由度 $(n-1)$ の上側 $\alpha/2 \times 100\%$ 点である．

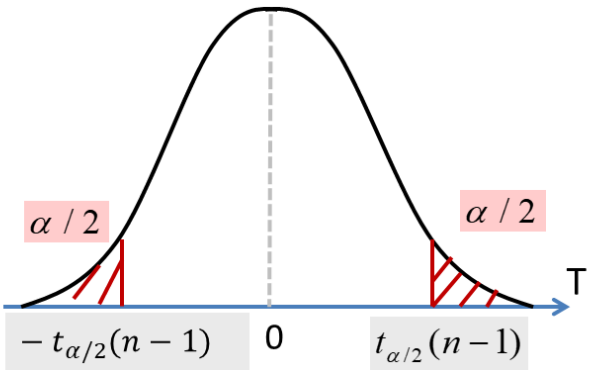


図3　t 分布と水準の概念図

例 2 （マグロの続き)σ を未知とするとき，90% 信頼区間, 95% 信頼区間および 99% 信頼区間をそれぞれ求めよ．

再び例として 90% 信頼区間を求めと，$\hat{\sigma} = 3.71$ および $\alpha = 0.1$ とすればよいから，自由度 $n-1=8$ のパーセント点を見ると，$t_{0.05}(8) = 1.860$ であることが分かり，これを用いて以下のように求めることができる．

$$\begin{aligned} & \bar{Y} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \\ \Longleftrightarrow \quad & 43 - 1.860\frac{3.71}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 43 + 1.860\frac{3.71}{\sqrt{9}} \\ \Longleftrightarrow \quad & 40.70 \leq \mu \leq 45.30 \end{aligned}$$

同様に計算して以下の結果を得る．当然であるが，ここでも信頼水準の値を大きくすれば信頼区間が拡がることが分かる．

信頼水準	α	$t_{\alpha/2}(8)$	信頼区間
90%	0.10	1.869	$40.70 \leq \mu \leq 45.30$
95%	0.05	2.306	$40.15 \leq \mu \leq 45.85$
99%	0.01	3.355	$38.85 \leq \mu \leq 47.15$

3.4 信頼区間の正しい理解のために

なお，よく間違える点であるが，信頼区間はパラメータがその範囲に含まれている確率ではなく，信頼区間を何度も構成するという操作を繰り返したときに，信頼区間が真のパラメータ値を含んでいる確率が $(1-\alpha)100\%$ という意味である．紛らわしい違いではあるが，この違いは次々章のベイズ推測では大きな意味を持って現れる．なお，図 2 において，信頼区間がパラメータの真値を包含する様子をシミュレーションで示した．

4 提出課題

今回の Lecture 8 と次回の Lecture 9 の課題と併せて一つの提出課題とします．計算式と答えを書いて，必ずまとめて 1 つのファイルで提出してください．ワードで数式の書けない人は，手書きの計算結果を写真に撮ってワードに張り付けて下さっても構いません．答だけの回答は大きく減点します．提出期限は 7 月 17 日 23:59 とします．

Lecture08-HW1 ある生物種の 6 個体を同じ環境で飼育したところ，生存日数が 1472, 1486, 1401, 1350, 1610, 1585 日であった．この観測値が正規分布にしたがうと仮定し，平均値 μ の 90% 信頼区間, 95% 信頼区間および 99% 信頼区間をそれぞれ求めよ．ただし分散は未知とする．

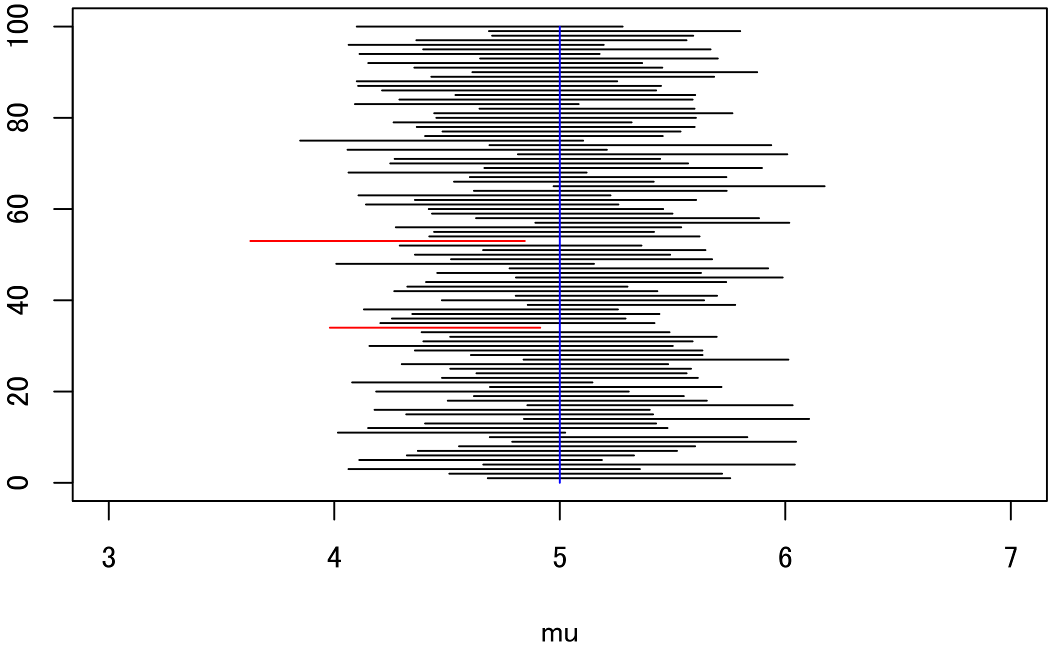
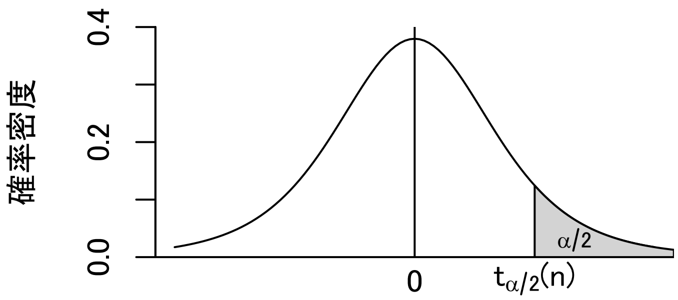


図4　$N(5, 2^2)$ の正規分布から 50 個のデータを生成し期待値パラメータ μ の 95% 信頼区間を構成．これを 10000 回の繰り返し，ランダムに 100 個の結果を選び出して信頼区間を図示．赤線が真値 $\mu = 5$ を含まなかった場合．偶然であるが 100 回中ちょうど 5 回，信頼区間が真値を含んでいない

付録: t 分布表

以下の表は，自由度 n の t 分布に従う確率変数 $T \sim t(n)$ について，上側 $\alpha/2\%$ 点 (これを $t_{\alpha/2}(n)$ とおく，すなわち $P(T \geq t) = \alpha/2$ を満たす t) の値を示している．例えば，表の行 $n = 10$, 列 $\alpha = 0.05$ の交わったところの数値を見れば $t_{0.025}(10) = 2.228$ が得られる．



n ＼ alpha	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	9.925
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	5.841
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	4.604
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	4.032
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.707
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	3.499
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	3.355
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	3.250
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	3.169
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	3.106
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	3.055
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	3.012
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.977
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.947
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.921
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.898
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.878
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.861
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.845
21	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.831
22	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.819
23	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.807
24	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.797
25	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.787
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.750
40	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.704
60	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.660
120	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.617
無限大	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.576