統計学

北門　利英（海洋生物資源学科）

Lecture 6 正規分布とその性質

Attention: 授業に関してわからないことがあれば，メールか6/17のリアルタイム接続時（13:00-14:00）に遠慮なく質問してください．

Point: 次の用語をしっかり理解すること．

- 離散型確率変数と連続型確率変数の違い
- 正規分布の定義とその性質，そして確率の計算ができること

生物資源学科の北門です．このビデオは統計学のLecture6の要約版です．今回は，正規分布の定義と性質についてお話しします．Lecture7以降でも正規分布は中心的な役割を果たしますので，必ず理解してください．それでは始めます．

背景例題

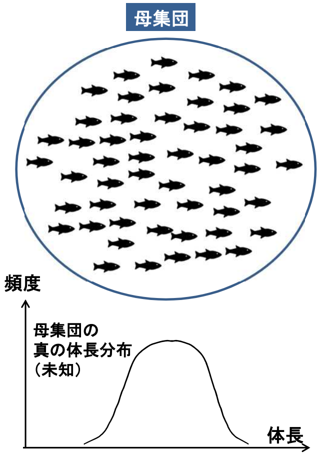
例題

例題 1: 魚の体長の母集団の推測

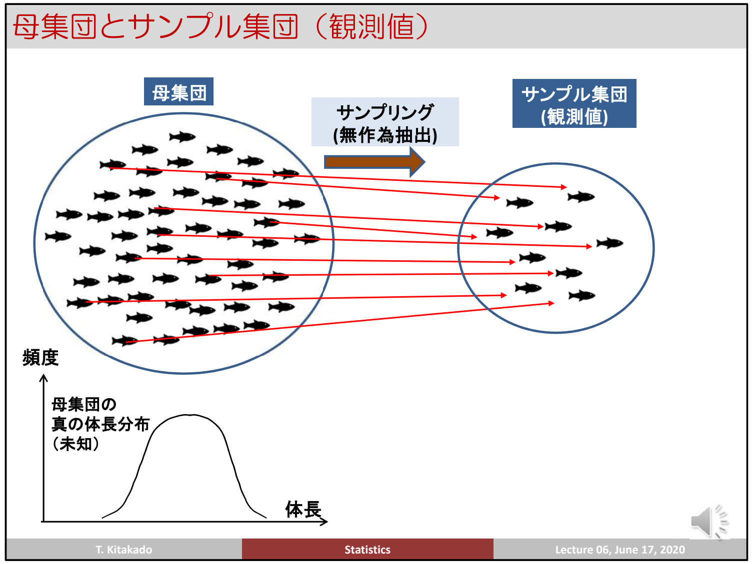
養殖場で商用に飼育している魚種があり，体長 20cm 以上が商品サイズとして考えられているとする．飼育場の母集団の体長分布を調べるとともに，20cm 以上の個体数の割合も知りたいとする．どうすればそれらを知ることができるであろうか？ただし，魚はすべて同じ年齢とする．

ここでは魚の体長の母集団について考えたいと思います．いま仮想的な設定として，養殖場で商用に飼育している魚種があり，体長分布と，母集団中の20㎝以上のさなかの割合を知りたいとします．

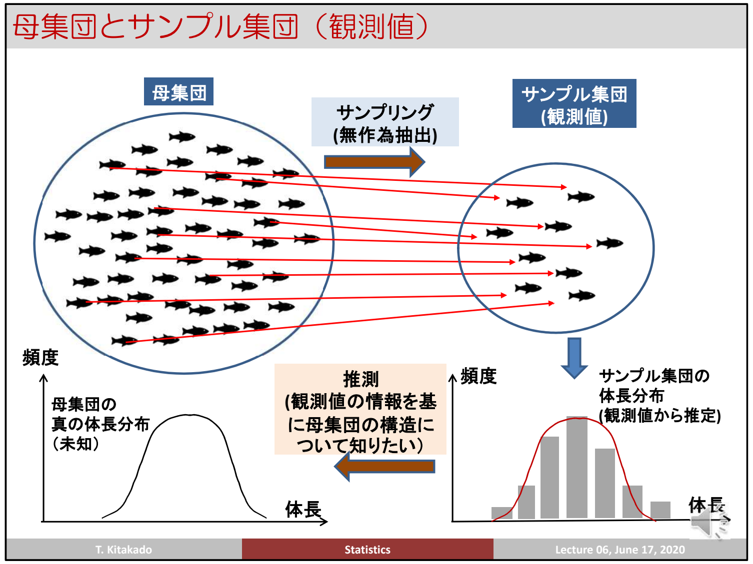
母集団とサンプル集団（観測値）



これを模式的に示すと，すべての魚の母集団があって，その体長分布を調べたいが，すべての個体の体長を測定するのは大変効率が悪いので．．．



一部を調べて全体の様子を知るために，サンプリングを行うのが常套手段です．．．．



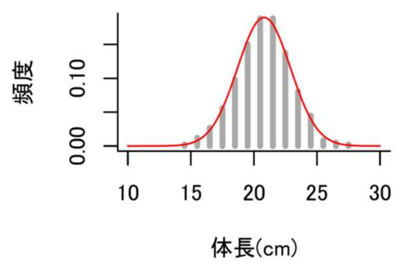
そしてサンプル集団の体長分布から，母集団の体長分布を表現したわけですが，そこになにがしかの数式を当てはめられないか，すなわち後で説明します正規分布を当てはめられないかと，考えます．

例題

例題 1: 魚の体長の母集団の推測

養殖場で商用に飼育している魚種があり，体長 20cm 以上が商品サイズとして考えられているとする．飼育場の母集団の体長分布を調べるとともに，20cm 以上の個体数の割合も知りたいとする．どうすればそれらを知ることができるであろうか？ただし，魚はすべて同じ年齢とする．

LenBin	LenClass	LenNumber
(10,11]	10.5	0
(11,12]	11.5	0
(12,13]	12.5	0
(13,14]	13.5	0
(14,15]	14.5	2
(15,16]	15.5	12
(16,17]	16.5	27
(17,18]	17.5	56
(18,19]	18.5	98
(19,20]	19.5	151
(20,21]	20.5	189
(21,22]	21.5	189
(22,23]	22.5	138
(23,24]	23.5	81
(24,25]	24.5	45
(25,26]	25.5	8
(26,27]	26.5	5
(27,28]	27.5	2
(28,29]	28.5	0
(29,30]	29.5	0



大泉ニジマス体長測定結果 (令和 1 年度) と正規分布の当てはめ結果

商用の例ではありませんが，大泉ステーションのニジマスの体長分布に当てはめると，データの度数分布表とヒストグラムがこのように得られ，結果としてこのような赤い線の曲線で，この体長分布を推定することができました．ここに正規分布の考え方を適用しています．

正規分布の定義

それではその正規分布の定義をしたいと思います．

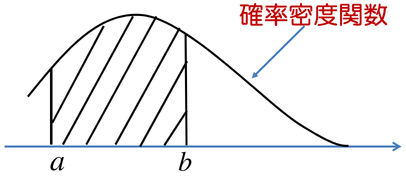
連続型の確率変数と確率分布

連続型確率変数：数直線上の値を連続的にとる確率変数
連続型確率分布：連続型確率変数に対する確率分布

標本空間　数直線のある区間

確率分布　$P(a < Y \le b) = \int_a^b \underline{f(y)}dy$

確率密度関数



標本空間の特定の１点に対して確率を付与できない！

区間に対して積分で確率を定義する

その前に，正規分布も含まれる連続型確率分布について復習したいと思います．忘れた方はLecture2の資料も参考にしてほしいですが，端的に言いますと，2項分布やポアソン分布などの離散型とはことなり，原理的には数直線上のある区間のどの値でも連続的にとれる，という確率分布です．どの値が出やすいか，を表す関数を確率密度関数といいます．この図の場合，aよりもbの値の方が出やすいことは言えますが，横軸1点1点について確率を定義することはできず，代わりにこのように積分することで区間で確率を定義します．

連続型確率変数の期待値，分散，標準偏差

期待値(expectation)　$E[Y] = \int y\, f(y)dy$

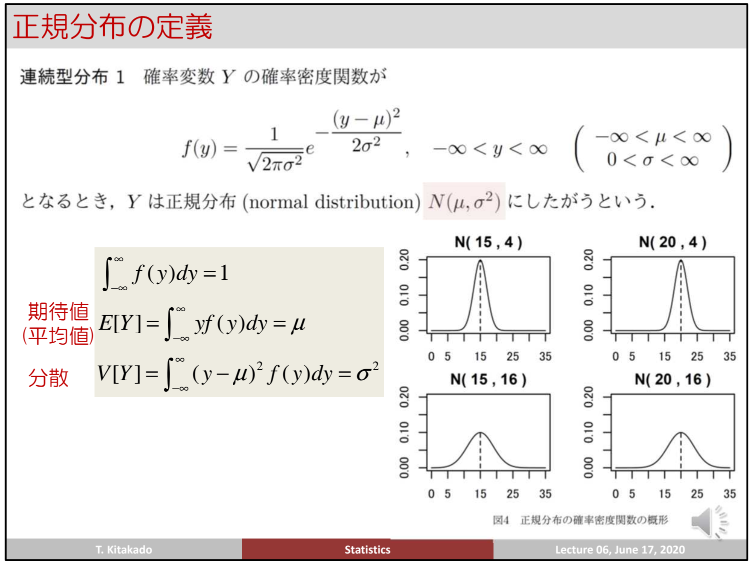
分散(variance)　$V[Y] = E[(Y - E[Y])^2] = \int (y - E[Y])^2 f(y)dy$

標準偏差(standard deviation)　$SD[Y] = \sqrt{V[Y]}$

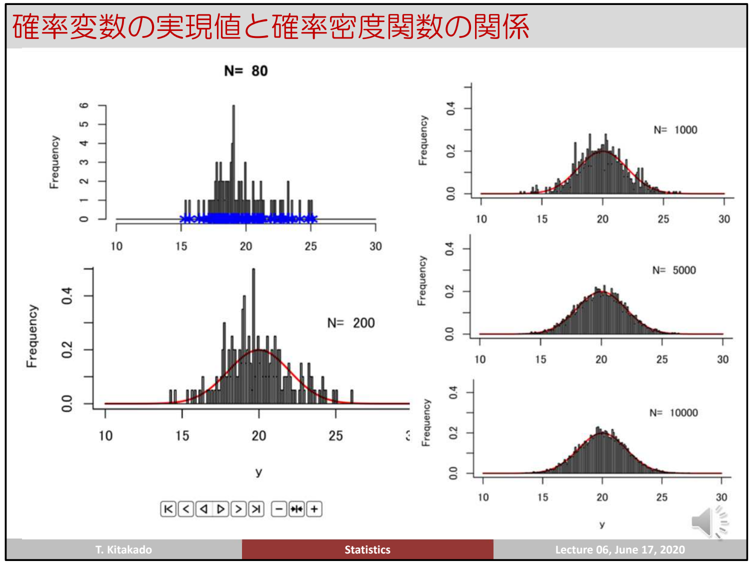
期待値と分散の性質（離散型と同じ）

$$E[\omega_A \cdot Y_A + \omega_B \cdot Y_B] = \omega_A \cdot E[Y_A] + \omega_B \cdot E[Y_B]$$
$$V[\omega_A \cdot Y_A + \omega_B \cdot Y_B] = \omega_A^2 \cdot V[Y_A] + \omega_B^2 \cdot V[Y_B] \qquad (Y_A \perp Y_B)$$

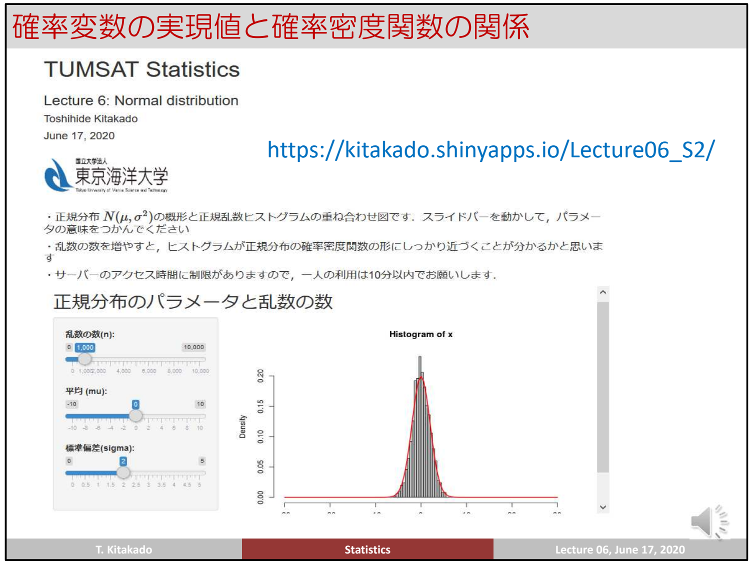
期待値，分散，標準偏差なども，シグマ記号が積分記号に代わるだけで，離散型と同じように定義できます．



正規分布は連続型確率分布のなかでも最も使用頻度が高く，また様々な素晴らしい数学的性質を持っていますが，まずは確率密度関数がこのように表される確率分布だと思ってください．記号はN，mu, sigma2乗，と書き，muは期待値，sigma2は分散を意味します．概形も平均値に対して左右対称で，分散が一定なら確率分布の関数形は変わらずスライドするだけ，また分散が大きくなるとチラバリが大きくなり左右に裾を引く形になります．



確率変数の実現値と確率密度関数の関係が分かりにくいかもしれませんので，ハンドアウトにはN(20, 2^2)の実現値200個を順番に得てそれをヒストグラムに一つ一つ追加していく様子をアニメーションと，200個ずつ追加し実現値のヒストグラムと確率密度関数の関係の比較するアニメーションを用意しています．この図のようにN=10000ではもう実現値のヒストグラムと確率密度関数はほぼぴったり一致していますね．



なお，このスライドの記載のスライドに，インタラクティブなアプリを用意しています．ぜひ覗いてみて下さい．

では次に正規分布の基本性質です．2つ述べますが，今回は最初に述べる標準正規分布をしっかり頭に入れてください．

正規分布に関する性質 (1) 標準正規分布 N(0,1)

性質 1　確率変数 Y が $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき，

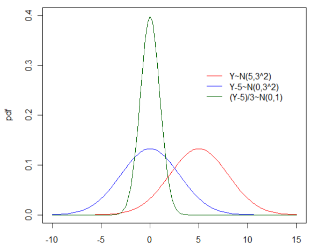
$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \tag{5}$$

は $N(0,1)$ にしたがう．この変換を標準化 (standardization)，また $N(0,1)$ を標準正規分布 (standard normal distribution) という．

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Y-\mu \sim N(0, \sigma^2)$$

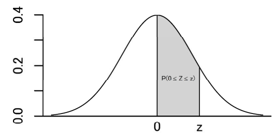
$$\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$



T. Kitakado　Statistics　Lecture 06, June 17, 2020

この性質はとても重要で，定期試験でも必ず出ますが，まずある確率変数Yが平均mu，分散sigma^2の正規分布に従っているとします．このとき，このYから平均値muを引いて，標準偏差sigmaで割った値も確率変数ですが，それをZと置くと，もともとのmuとsigmaが何であってもそれを使って変換すれば平均が0，分散が1の正規分布に変換できます．このような変換を標準化，また平均0，分散1の正規分布を標準正規分布と呼びます．

正規分布に関する性質 (1) 標準正規分布 N(0,1)



Z〜N(0,1)

P(0 ≦ Z ≦ 1.96)=0.4750

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

T. Kitakado　Statistics　Lecture 06, June 17, 2020

この標準正規分布には数表が与えられていて，例えば0から1.96の値の確率は0.475という具合に．この数表を用いた計算の練習問題をハンドアウトに記載していますので，ぜひ取り組んでください．

正規分布に関する性質 (2) 再生性

正規分布にしたがう独立な確率変数の和もまた正規分布にしたがう．独立同一な n 個の正規分布にしたがう確率変数の和もまた正規分布にしたがう．これらの性質は区間推定と仮説検定のところで再度説明するので，今回は定理の存在だけ覚えておいてください．

定理 2 確率変数 Y_1, Y_2 が独立でそれぞれ $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ にしたがうとき，$aY_1 + bY_2$ は $N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ にしたがう．

定理 3 確率変数 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ が独立同一に $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき，$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ は $N(\mu, \sigma^2/n)$ にしたがう．

再生性については来週またお話しします，

例題と演習

続いて最初の大泉ニジマスの例に戻ると．．．

例題の解

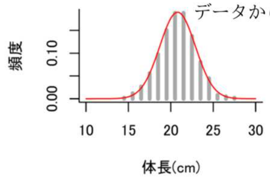


図2 大泉ニジマス体長測定結果 (令和 1 年度) と正規分布の当てはめ結果

データから平均値 $\mu = 20.8$, 標準偏差 $\sigma = 2.1$ と推定される.

$Y \sim N(20.8, 2.1^2)$ を想定

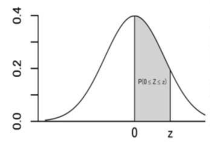
推定の方法は来週詳しく述べます.
今回は推定のことは忘れ，正規分布の
性質と確率の計算に集中します

来週お話しする推定の方法を通して，mu=20.1, sigma=2.1と推定されますので，これを基にニジマスが20cm以上である確率を計算すると．．．

例題の解

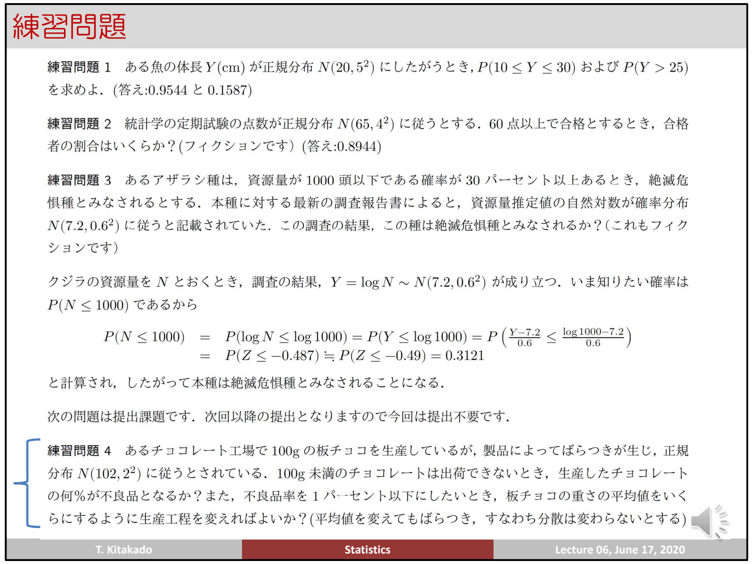
$Y \sim N(20.8, 2.1^2)$

$$
\begin{aligned}
& P(Y \geq 20) \\
= \ & P\left(\frac{Y-20.8}{2.1} \geq \frac{20-20.8}{2.1}\right) \quad \text{(括弧の中は事象を表すので両辺四則演算可，標準化する)} \\
= \ & P(Z \geq -0.381) \quad \left(Z = \tfrac{Y-20.8}{2.1} \text{とおくと} Z \sim N(0,1)\right) \\
= \ & P(-0.381 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \quad (Z \sim N(0,1)\text{の数表（付録）を用いるために確率を分割}) \\
= \ & P(0 \leq Z \leq 0.381) + 0.5 \quad (Z \sim N(0,1)\text{の確率密度関数は } 0 \text{ に対して左右対称}) \\
\fallingdotseq \ & P(0 \leq Z \leq 0.38) + 0.5 \quad (P(0 \leq Z \leq 0.38)\text{は付録の数表から } 0.148 \text{ ともとまる}) \\
= \ & 0.648
\end{aligned}
$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389

形式的にこのように定義でき，確率の中の事象を少し変形して標準正規分布の形に持っていきます．途中Zが0以上である確率が出てきますが，これは0で左右対称ですので0以上あるいは0以下の確率はともに0.5, そして0~0.38に入る確率は0.148ですから併せて0.648となります．簡単ですね．



理解の確認のために練習問題1～4にも取り組んでみて下さい．練習問題4は次回以降とまとめてとなりますが，提出課題です．それではLecture6のダイジェストビデオを終わります．